逻辑学及其在数学基础应用中的一些问题

李鸿仪[1]，

(上海第二工业大学，上海市金海路 2360 号，上海 201209)

摘要：为了从根本上消灭存在于数学基础中的各种悖论，使数学建筑在高度可靠的基础上，发现形式逻辑只能用于同一律，矛盾律和排中律这三大规律都成立的讨论域（称为可行域）内，否则就会产生包括悖论在内的各种错误，而在形式逻辑的适用范围即可行域内，只要前提可靠，推导严格，悖论是不存在的。根据该结论，分析了说谎者悖论和理发师悖论等一些历史上比较著名的悖论的形成原因，同时指出了数学基础中皮亚诺公理的应用和康托尔定理、区间套和对角线法证明中的一些逻辑错误，提出了能够避免这些错误的统一的定义自然数、有理数和无理数的建议。

关键词：逻辑学；悖论；可行域；数学基础；Piano 公理；康托尔定理；区间套方法；对角线法

中图分类号：O143

Problems of Logic and its application in mathematical foundations

Li Hong-yi

Shanghai Second Polytechnic University(Shanghai 201209, P. R. China)}

abstract: In order to fundamentally eliminate all kinds of paradoxes existing in mathematic foundation and make mathematics architecture on a highly reliable basis, it was found that formal logic can only be used in the discussion domain (called the feasible domain) in which all of the three laws, i,e, the law of identity, the law of non-contradictory and the law of excluded middle are hold true. Otherwise, various errors including public opinion will occur. It was concluded that in feasible domain, as long as the premise is reliable and the derivation is strict, no paradox exists. Some historically famous paradoxes such as liar paradox and barber paradox

---

[1] 1952-，原上海第二工业大学教授，hyli@sspu.edu.cn

were therefore analyzed. At the same time, the logical mistakes in the application of Piano axiom, in the proofs of Cantor's theorem, the interval method and diagonal argument were pointed out. Suggestion for a uniform definition of natural numbers, rational numbers and irrational numbers to avoid any errors was therefore proposed.

Keywords: logic; paradox; feasible domain; mathematical foundation; Piano axiom; Cantor's theorem; the interval method; diagonal argument

1 引言

十九世纪末，人们在物理学似乎十分完美的理论大厦面前，坚信所剩只是一些修饰工作，往后难有作为了。对光的波动理论和黑体辐射等经典物理学难以解释的问题，也认为不过是晴空万里中的两朵乌云[1]，迟早会被风刮走。

然而就是这两朵乌云，最后却动摇了物理学大厦的基础，使其产生了革命性的变化。

在逻辑学上方的晴空万里中，似乎也飘着一些乌云。例如，如果逻辑是普遍适用的，为何会存在大量逻辑学不能解释的悖论[2]？如果逻辑学不是普遍适用的，又如何界定它的适用范围？

任何一个有一定素养的数学家或是在数学领域内有所建树的数学工作者，一旦进入数学基础的领域，也通常都会感到头晕：这里不但存在着在其他严格的数学分支看不到的悖论，还有大量有悖于常识的东西。而其中的一些所谓证明，虽然大胆、自由有余，却并没有经得起反复推敲的严谨性。

显然，对逻辑学和数学基础中的这些乌云作一正本清源式的清算工作，是十分有必要的。本文将做一些初步的尝试。

2 逻辑规则的起源

从简化问题的角度来说，像某些先验论哲学家那样，把逻辑规则看作是先天或先验的，似乎十分有效。但这些哲学家却无法回答：最初的单细胞生物最后如

何会在人脑中进化出“先天正确”的逻辑规则？

其实，对于刚出生的婴儿，我们并不能观察到任何可以称得上其应用逻辑规则的现象。因此，我们没有理由武断地认为包括逻辑规则在内的思维规则是先天的。然而，人是有学习能力的。当人们有意无意甚至“误打误撞”地用某种信息加工模式在实践中获得成功时，该加工模式就会在他的记忆中保存了下来，而那些在实践中导致失败的加工模式则会被忘却。因此，实践的正负反馈使得个体逐渐形成了能帮助其在实践中获得成功的信息加工模式。换言之，个体的信息加工模式是通过“试错”获得的。

这种加工模式既包含了较简单的条件和无条件反射，也包含了有思维参与的信息加工。对人类来说，思维在信息加工中起了重要的作用。这种加工模式中的思维模式也可称为个体的思维习惯。因此，个体的思维习惯也是在“试错”中逐渐积累下来的。

然而，人是有语言交流能力的。既然进化无法形成逻辑规则，那么，当人们用语言交流各自成功的思维习惯后，其中取得共识并能普遍流传开来的思维习惯就只能是逻辑规则的来源。

由此可见，从根本上说，逻辑规则源于实践。

3 逻辑的局限性和产生悖论的原因

逻辑的好处是能够帮助人们整理感管材料。例如，通过定义一些概念，可以方便地对相关事物进行辩识。通过一些逻辑规则还能对这些概念的互相关系进行整理。例如，若将用近乎完全归纳法得到的知识称为公理，就可以用演绎法形成一个包含各种已知甚至未知知识的庞大的演绎体系。欧几里得的《几何原本》[3]和牛顿的《自然哲学的数学原理》[4]就是这方面的典范。从可靠的公理出发，用具有十分广泛实践基础的逻辑规律证明的定理，往往比直接从较为有限的实践中归纳得到的经验规律更可靠，由此形成了数学等严格科学的主要研究方法：逻辑证明。不过，获得可靠的逻辑结论显然必须满足两个条件：一是公理可靠，二是

逻辑规则可靠，而这两者其实并不一定都能成立。首先，如果公理是对于实践知识的归纳， 由于实践的范围永远是有限的，因此，无法保证公理一定成立。例如，牛顿力学的三大定律，就是源于对实践知识的总结。虽然在低速宏观状态下，它足够可靠，但进入微观和高速的时候，它就不再成立。

非欧几何的诞生使人们感觉到公理并不一定要从实践中得到，而可以通过人的自由思维来构造。当机器推理成为现实时，自由地构造一些公理，然后用机器得到庞大的演绎体系是轻而易举的。如果这些东西也都可以成为学术知识的话，人类将无法掌握如此海量的知识。而在海量的"知识"中选取真正有用的知识，其在实践中有没有用武之地就将成为衡量标准。例如，如果非欧几何没有在相对论中得到应用的话，恐怕人们早就把它忘记了。因此，即使源于自由思考而得到的知识，最后也不能离开实践的制约。

除了公理的可靠性不一定成立以外，逻辑本身的可靠性也不始终成立。理由其实也十分简单：既然逻辑规则源于实践中似乎能普遍获得成功的思维习惯，而实践的范围永远是有限的，所以我们也不能保证逻辑的普遍性。某些悖论的存在就是一个明证

最著名的悖论是所谓说谎者悖论[2]：他说的都是谎话。如果他说的这句话是真话，则说明他至少说了一句真话，即他说的并不都是谎话，所以这句话是假话，于是就形成了矛盾。同理，如果这句话是假话，则说明他说的都是真话，但是这句话又是假的，于是又形成矛盾。无论这句话是真是假，结果都是互相矛盾的。说谎者悖论绞尽了人类历史上很多智者的脑汁，至今仍然没有得到完美的解决。如果认为形式逻辑永远正确，那么这个悖论也永远无解。然而，如果并不迷信形式逻辑，而把它看成是有适用范围的，问题其实并不难解决。事实上，形式逻辑是以同一律，矛盾律和排中律这三大规律为基础的。因此，只有在这三大规律都成立的讨论域(以下称形式逻辑的可行域，简称可行域[5])内，形式逻辑才是可靠的。产生说慌者悖论的原因其实仅在于在所讨论的范围内，矛盾律已不再成立，或者说讨论不在可行域内。这里面其实有两句话：他说的这句话是真的，但他说

的其他话都是假的。显然，真假是互相矛盾的，因此，不能把这句真话和其他假话合并在一起(变成"所有话")讨论，否则就进入了互相矛盾的非可行域内，产生悖论自然并不奇怪。正确的说法应该是：除了这句话以外，他说的其他话都是谎话。

著名的理发师悖论[2]其实也是把行为矛盾的两类人(一类给自己刮脸，另一类不给自己刮脸)混在一起，从而使讨论偏离了可行域所致。该悖论可通过将理发师本人排除在广告之外予以消解。这样，无论理发师给不给自己刮脸，都不会与广告矛盾。理由其实并不复杂：由于给自己刮脸的人有理发师，但也可能有一部分比较节约或喜欢自己刮脸的村民。显然，广告的范围并不会包括这类人，而仅限于不给自己刮脸的那部分人。换言之，若用集合 S 表示不给自己刮脸的这部分人，则 S 的定义不但排斥了理发师，而且还排斥了给自己刮脸的那部分村民，如果再反过来把理发师看作集合 S 的一个元素来研究其行为，直接就与 S 的定义矛盾，违反了矛盾律，偏离了可行域，产生悖论自然就毫不奇怪了。

有些悖论不一定是讨论偏离了可行域所致。例如，如所周知，追赶问题应该用速度来进行研究。如果将速度概念偷换成空间概念，而忽略了时间问题，就会导致所谓的芝诺悖论。在芝诺悖论的“阿克琉斯”论证中[2]中，追赶所需要的时间其实是一个收敛的无穷级数，虽然级数的项是无穷多的，但其和却是有限的。因此，所谓芝诺悖论不过是源于一种错误的想当然：无穷个数的加和必然是无穷的。在有了收敛的无穷级数概念后，芝诺的这个悖论其实已经被彻底破解而不值一提了。

蛋鸡悖论实际上并不存在[5-6]。这是因为，鸡是从其他物种逐步进化而来，如此一直可以追溯到单细胞生物，而单细胞生物是通过细胞分裂来繁殖的，这时，“蛋”、“鸡”不分。因此该悖论是源于生物是不能进化的这一错误前提才出现的，但由于其后的推导并不没有问题，所以实际上反而可以作为“生物是在进化的”反证。

最近的文献[7]也从生物进化的角度给出了类似的解释，但其回答似乎是将“先

有鸡还是先有蛋”这一问题转化成“先有鸟还是先有鸟蛋”的问题，并不太彻底。

由此可见，所谓悖论，要么是讨论偏离了可行域，要么是讨论不严格或引入了一些错误的假定或想象所至。

4 数学基础中的逻辑问题

在各门科学中，数学是最严格的。在数学的绝大部分成熟的领域，证明通常都很严谨，也很难见到悖论。然而在数学基础中，不但存在悖论，而且还存在很多看似巧妙，其实经不起推敲的证明。

例如，数学基础中的逻辑主义[6]认为可以用逻辑构造所有的数学知识。然而，如前所说，逻辑不过是人类对于一些成功的思维习惯的总结，因此，逻辑学本身并不包含任何一门具体学科的具体知识，仅仅用逻辑学的知识来构筑任何一门学科的具体知识，都注定是要失败的。

例如，在一些著作中常常有所谓用皮亚诺公理[7]来定义加法并证明 1+1=2 的表述。但在该公理的语焉不详的后继数概念中，其实已经隐含了 1+1=2 这一源于实践的知识，否则就无法解释为什么 1 的后继数是 2 而不是 3。事实上，如果规定 1 的后继数是 3，例如，如果规定 0，1，3，4，5，6 或 0，1，3，5，7，9….为自然数，并没有违反皮亚诺五条公理中的任一条，但这样势必会得出 1+1=3 这一错误结论！由此可见，用隐含了 1+1=2 的后继数概念反过来再来定义加法并证明 1+1=2，这种充满了逻辑循环的定义和证明显然是毫无意义的。这个例子具体说明了，仅仅用逻辑学的知识是无法给出具体的科学知识的。哥德尔不完全定理其实也不过是该事实的一种证明而已。

康托尔定理[8-9]（$card(P(A))>card(A)$）的证明也是错误的。

该证明的要点是：设 f 是从 A 到 A 的幂集 $P(A)$的任何函数，必须证明这个 f 必定不是满射的。要如此，只要展示一个 A 的子集不在 f 的像中就足够了。这个子集是

$$B=\{a\,|\,a\in A, a\notin f(a)\}$$

康托尔证明了，不存在 $\delta\in A$，使得 $f(\delta)=B$，即 B 不在 f 的像中。

该定理的证明显得简洁而巧妙，但实际上却经不得起严格思维的推敲！

让我们先考察一个具体的例子：

无限集合

$$\left\{1,\quad 1+\frac{1}{2!},\quad 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!},\quad \ldots,\quad 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\frac{1}{n!},\quad \ldots\quad\right\} \qquad (1)$$

显然可以与自然数集 N 建立一一对应关系 h ：

$$h:1\leftrightarrow 1,\quad 2\leftrightarrow 1+\frac{1}{2!},\quad 3\leftrightarrow 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!},\quad \ldots,\quad n\leftrightarrow 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\frac{1}{n!},\quad \ldots \qquad (2)$$

由于一一对应包含了满射，所以，集合(1)和自然数集也是互为满射的。

无限集合(1)的最后一个元素恰好是自然对数的底 e，所以集合(1)也可以表示成

$$\left\{1,\quad 1+\frac{1}{2!},\quad 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!},\quad \ldots,\quad 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\frac{1}{n!},\quad \ldots\quad \mathrm{e}\right\} \qquad (3)$$

然而，由于每个自然数都是有限的，所以不存在 $n\in N$，使得 $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\frac{1}{n!}=\mathrm{e}$

能因此认定 h 不是满射的吗？

产生这种矛盾的原因在于：如果无限集合存在最后一个元素，该元素只能是达到无穷的结果，而自然数不可能达到无穷，但这并不妨碍两个无限集内其它所有未达到无穷的元素之间建立一一对应关系。

在历史上，关于潜无穷和实无穷的争论一直没有定论[6]。但既然逻辑不过是人类思维经验的总结，本身并不能无中生有地创造出任何具体的知识，那么，这

个无法用更普遍的知识来加以逻辑证明的数学问题，就只能直接从实践出发来加以考察。

从实践的角度，不难归纳出两种类型的无穷集，第一类无限集的最后一个元素是存在的(如上例[2])；第二类则不存在最后的一个元素，例如，任何自然数都有后继数，所以自然数集没有最后的元素。显然，第一类无限集用实无穷或潜无穷都可以加以描述：用潜无穷来加以描述时，虽然没有写出最后一个元素，但并不否认其存在；而第二类无限集则只有用潜无穷来加以描述时才不会与实践冲突。

这种分类不但是很自然的，而且与实践一致，是客观存在的。

由此可见，对于第一类无穷集，存在不是映射的像的元素并不表明映射一定不是满射的（如上例），而后者正是康托尔定理证明的依据！

事实上，在康托尔定理的证明中，其构筑出来的 *B* 恰好可以是 *P*(*A*)的最后一个元素。

设

$$A = \{1,2, 3 \ldots\} \qquad (4)$$

则我们有

$$P(A)=\{ \{\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2, 3\} \ldots\{n\}\ldots \{12, 3 \ldots n \}\ldots\{1,2,3\ldots \} \} \qquad (5)$$

由于存在着最后一个元素，*P* (*A*)属于第一类无限集。设

$$f: 1\rightarrow\{\}, 2 \rightarrow \{1 \}, 3\rightarrow \{2\} , 4 \rightarrow\{1,2\}\ldots\ldots \qquad (6)$$

[2] 有的人可能认为我们无法到达无穷而认为 e 不存在。这在逻辑上是不成立的。例如，我们无法到达太阳，太阳仍然是存在的。

因为 $1 \notin \{\}, 2 \notin \{1\}, 3 \notin \{2\}, 4 \notin \{1,2\}$ …… 所以我们可以得到

$$B = \{1,2, 3\ldots\} \tag{7}$$

可见，这时 B 恰好是第一类无限集 $P(A)$的最后一个元素！而如前所述：最后一个元素不是映射的像并不表明映射一定不是满射的，康托尔的证明不成立！

康托尔的错误在于将基于有限集的满射定义推广到了未必适用的无限集3，或者说，是混淆了有限集和无限集的区别。

在与康托尔定理密切相关的所谓实数不可数的证明中，同样也存在因为不严谨而导致的错误。

在用区间套法证明实数不可数[10]时，是通过不断划分区间来“避开”所列出的实数，并最后得到一个不在所列出的实数的“新”的实数即区间长度等于零的极限点，从而反证了实数是不可列的。显然在极限点之前，区间是一直可分的，所以一直可以“避开”所列出来的实数，但极限点本身不是区间，无法再继续用划分区间的方法来“避开”所列出的实数，即无法排除极限点是所列出的实数之一的可能性，反证失败！

在用著名的对角线法[11]证明实数的不可数时，也先假定实数是可数的并将其全部列出来，然后巧妙地用对角线构筑一个不同于所列出的所有实数的“新”实数，从而反证了实数是不可数的。然而，该方法要求对角线可以穿越所有列出来的实数，从而使得对角线能包含任一个所列实数的某一位小数，这样才能用对角线构筑不同于任何列出来的实数的“新”实数，使反证成立，而这也是做不到的：以十进位小数为例， n 位小数对应的小数有 10^n 个，而对角线只能穿越其中的 n 个小数。无论小数位数 n 为有限或无穷，上述事实都不可能改变。因此反证也失

---

3 也有的人可能认为，如果一律用潜无穷的做法，且不把最后一个元素包括在无限集内，满射的定义就可以推广到任何无限集了。但如果这样做，B 就不是无限集内的元素，不但与 $P(A)$的定义矛盾，而且即使构筑出来了也不能证明 f 不是满射的，康托尔定理仍然没有被证明。

败！

由此可见，无论实数究竟是可数还是不可数，至少到目前为止，还没有一个严格的证明可以证明实数是不可数的。

上述几个证明都是用反证法进行的。虽然证明过程显得十分简洁巧妙，所得到的结果却有悖于人的直觉。数学史上的直觉主义[6]者认为反证法是不可靠的，但却又给不出足以说服人的理由。事实上，在可行域内，并没有理由认为基于排中律的反证法本身不能成立。不过，任何数学证明当以绝对的严格为己任，任何一点点的不严格都可能导致十分荒谬的结果，反证法岂能例外？事实上，在反证法中，由于不严格导致的错误往往隐蔽得更深，更不容易被发现，所以更必须小心翼翼，才有可能得到可靠的结果。

在数学基础中，不严格的证明导致的错误和混乱长期存在着且至今得不到纠正，本文仅仅指出了其中的部分例子。

这些错误和混乱同时应该还和数的定义不够合理有关。

从数学史的角度来看，人类是先发现了自然数，后才发现了有理数，最后才发现了无理数。因此，用自然数来定义有理数（即将有理数看作是两个自然数的比），再用有理数来定义无理数（通过戴德金分割），是十分自然的，也是到目前为止被广泛采用的方法。但这并不一定意味着这种定义方法是唯一的，甚至不能保证这种定义是足够合理的。

如所周知，从逻辑学角度来看，定义的现代解释是对于一种事物的本质特征或一个概念的内涵和外延的确切而简要的说明。然而， 事物的本质特性究竟是什么？显然将取决于人们的认识水平，因此，对于同一个或同一类事物，不同的认识水平就可能有不同的定义。

用自然数来定义有理数，再用有理数来定义无理数，符合人类对数的认识过程，似乎显得十分自然。然而，符合人类认识过程的定义通常并不能抓住事物的

本质特性。这是因为，人类的认识很少一开始就能接触到事物的本质。例如，从人们最初接触到的自然数出发的定义把数分成各种不同的类型，没有也无法给出它们的共同点并将其统一起来，不但留下很多矛盾，产生的诸如可数不可数的争论到现在也没有停止，

那么，有没有更能抓住本质的定义呢？

文献[12]叙述了用无穷小数表达无理数的方法。笔者以为，可以统一用无穷小数来定义自然数、有理数和无理数：有理数不过是某一位开始全部为零或循环小数（零也可以视作一种循环节）的无穷小数；包括自然数在内的整数则是从第一位小数开始就全部为零的无穷小数。

这样定义不但十分简洁，而且找到了自然数、有理数和无理数这三种数的共同点：无穷小数，从而可以将其统一起来。

当我们所要认识的对象显得缤纷离析的时候，我们很难认为已经找到了其本质；当我们所认识的对象显得统一和谐的时候，我们至少可以认为接近了对象的本质。通过对具体事物的抽象寻找其共同点至少是人们寻找事物本质特性的方法之一。因此，可以把无穷小数看作是上述三种数的本质特性，从而可以把实数统一了起来。而所有的因为没有抓住事物本质的不必要的争论实际上也将不复存在。例如，与人们的直观一致，自然数、有理数和无理数都可表示为数轴上的一点，三种数的本质都是无穷小数，在测度学上的地位也相等，故很容易用属（无穷小数）加种差的常规逻辑方法来加以科学、明确的定义。

5 总结

逻辑源于实践。在同一律，矛盾律和排中律这三大规律都成立的论域(可行域)内，只要前提可靠，推理严格，形式逻辑不会产生悖论，数学据此可以建立在高度可靠的基础之上。本文指出了数学基础中的逻辑主义不可能成功的原因所在，同时指出了康托尔定理、区间套和对角线证明中的一些错误，并给出了能够避免这些错误、并能用属加种差这一科学的逻辑方法来定义自然数、有理数和无理数

的方法。

参考文献

[1]物理学的两朵乌云
https://baike.baidu.com/item/%E7%89%A9%E7%90%86%E4%B8%A4%E6%9C%B5%E4%B9%8C%E4%BA%91/10015431?fr=aladdin
[2]张建军.逻辑悖论研究引论(修订本) [M].人民出版社，2014.
[3][古希腊]欧几里得.几何原本[M].江苏人民出版社.2011[7]
[4][英]艾萨克·牛顿自然哲学的数学原理[M].重庆出版社.2015
[5]李鸿仪思维规律及其可靠性与实践的关系.in:何全胜，郭泽德主编.科学思维[M]，经济日报出版社 2017：364-377.
[6]李鸿仪.真伪悖论的形成原因及其消解方法，悖论研究与哲学时代化研讨会论文集[C]. 2016.7.12-2.16.7.14，PP 341-346，上海大学社会及科学学院，上海市逻辑学会.
[7]哲学诗画.我国哲学家完成先有鸡先有蛋的世界难题解答！太给力了.2018-09-06 17:42
http://mini.eastday.com/bdmip/180906174244314.html
[8][美]保罗·贝纳塞拉夫;希拉里·普特南。数学哲学[M].商务印书馆，2010
[9]皮亚诺公理
https://baike.baidu.com/item/%E7%9A%AE%E4%BA%9A%E8%AF%BA%E5%85%AC%E7%90%86/6218666?fr=aladdin
[10] Georg Cantor (1891). "Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre". Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1890C1891.1: 75C78 (84C87 in pdf _le). English translation: Ewald, William B. (ed.)(1996). From Immanuel Kant to David Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics, Volume 2. Oxford University Press. pp. 920C922.
ISBN 0-19-850536-1.
[11]康托尔定理.
https://baike.baidu.com/item/%E5%BA%B7%E6%89%98%E5%B0%94%E5%AE%9A%E7%90%86/1724872
[12] 郑维行,王声望编.实变函数与泛函分析概要[M].高等教育出版社 2005,第三版第一册.
[13] 温邦彦.什么是康托的不可列集合?———无穷理论的新方案(3) [J]. 重庆工学院学报(自然科学),23, 2009 (11):145-153.
[14]华东师范大学数学系.数学分析(第四版) [M].高等教育出版社,2010.